I. Integrace pomocí vzorců a pravidel

a) vzorec V 2 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

Příklady:

1. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$

Odmocniny upravíme na mocniny s racionálním exponentem.

2. $\int \sqrt[4]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{4}}\, dx = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + C$

3. $\int \left(x^2 + 2x - \frac{3}{x^2} \right) dx = \int x^2 dx + \int 2x dx - \int 3x^{-2} dx = \frac{x^3}{3} + c_1 + \frac{2x^2}{2} + c_2 - 3\frac{x^{-1}}{-1} + c_3 =$

.. upravíme zlomky a integrační konstanty se sečtou .. $= \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{3}{x} + C$

4. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx + \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} + C$

b) vzorec V 8 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\left|f(x)\right| + C$

Příklady:

1. $\int \frac{2x}{x^2 - 5} dx = \ln\left|x^2 - 5\right| + C$

Pokud je čitatel integrované funkce derivací jmenovatele, je výsledkem integrálu přirozený logaritmus absolutní hodnoty jmenovatele. Pokud je to třeba, je možné čitatele upravit vytknutím a rozšířením.

2. $\int \frac{5\cos x}{\sin x + 4} dx = 5\int \frac{\cos x}{\sin x + 4} dx = 5\ln\left|\sin x + 4\right| + C$

3. $\int \frac{2x^2}{x^3 + 2} dx = 2 \cdot \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3 + 2} dx = \frac{2}{3}\ln\left|x^3 + 2\right| + C$

4. $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln\left|\cos x\right| + C$

c) vzorec V 9 $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

Příklady:

1. $\int \cos(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x+1)+C$

Je-li vnitřní složkou složené funkce lineární výraz $(ax+b)$, je výsledkem integrálu součin čísla $\frac{1}{a}$ a primitivní funkce k integrované funkci (se stejnou vnitřní složkou).

2. $\int \sqrt{4x-3}\,dx = \int (4x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\frac{(4x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}\sqrt{(4x-3)^3} + C$

3. $\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

d) vzorce V12 $\int \frac{1}{A^2+x^2}dx = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + C$

V13 $\int \frac{1}{A^2-x^2}dx = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + C$

Příklady:

Vzorce se liší znaménkem ve jmenovateli integrované funkce

1. $\int \frac{2}{x^2+9}dx = 2\int \frac{1}{x^2+3^2}dx = ..\text{V12}.. = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$

2. $\int \frac{1}{4-x^2}dx = ..\text{V13}.. = \frac{1}{2.2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C$

3. $\int \frac{5}{x^2-3}dx$ Ve jmenovateli je mínus, tedy použijeme V13, ale nejdříve vytkneme ze jmenovatele –1 a z čitatele 5:

$$\int \frac{5}{x^2-3}dx = -5\int \frac{1}{3-x^2}dx = ..\text{V13}.. = -\frac{5}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + C$$

Pokud je ve jmenovateli úplný kvadratický trojčlen, upravíme ho na čtverec a zbytek a teprve potom použijeme odpovídající vzorec.

4. $\int \frac{1}{x^2+4x+10}dx = \int \frac{1}{x^2+4x+4+6}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+6}dx = ..\text{V12}.. = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$

5. $\int \frac{1}{x^2-6x+10}dx = \int \frac{1}{(x-3)^2-9+10}dx = \int \frac{1}{(x-3)^2+1}dx = ..\text{V12}.. = \operatorname{arctg}(x-3) + C$

6. $\int \frac{1}{x^2+x+3}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 3}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}}\,dx = ..\text{V12}..$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{11}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}} + C$$

7. $\int \frac{1}{5+2x-x^2}\,dx = \int \frac{1}{-(x^2-2x-5)}\,dx = \int \frac{1}{-\left[(x-1)^2-1-5\right]}\,dx = \int \frac{1}{6-(x-1)^2}\,dx =$

$$..\text{V13}.. = \frac{1}{2\cdot\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+(x-1)}{\sqrt{6}-(x-1)}\right| + C$$

e) vzorce V14 $\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{A} + C$

V15 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm B}\right| + C$

Příklady:

Vzorce se liší znaménkem u x^2

1. $\int \frac{4}{\sqrt{x^2-3}}\,dx = ..\text{V15}.. = 4\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right| + C$

2. $\int \frac{3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = ..\text{V14}.. = 3\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

Je-li pod odmocninou úplný kvadratický trojčlen, doplníme na čtverec:

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+12}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+3}}\,dx = ..\text{V15}.. = \ln\left|(x-3)+\sqrt{x^2-6x+12}\right| + C$

II. Úpravy integrované funkce

O rozšíření zlomku jsme se zmínili u použití vzorce V8. Další častou úpravou zlomků je rozepsání na součet nebo rozdíl „menších“ zlomků, pokud v čitateli původního zlomku byl součet nebo rozdíl.

1. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x^3}dx = \int\left(\frac{1}{x^3} - \frac{\sqrt{x}}{x^3}\right)dx = \int\left(x^{-3} - x^{\frac{1}{2}-3}\right)dx = \int\left(x^{-3} - x^{-\frac{5}{6}}\right)dx = ..\ \text{V2}..$

$$= \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} = -\frac{1}{2x^2} - 6\cdot\sqrt[6]{x} + C$$

2. $\int \frac{(x+2)^2}{x^2}dx = \int \frac{x^2+4x+4}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)dx = \int \left(1+\frac{4}{x}+4x^{-2}\right)dx = ..\text{V1,3,2}..$

$= x + 4\ln|x| + 4\frac{x^{-1}}{-1} + \ C$

3. $\int \text{tg}^2\, x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \text{tg}\, x - x + C$

Někdy je možné rozepsat integrál na části, když se roznásobí integrovaná funkce. Nemůžeme integrovat každý činitel zvlášť, protože neexistuje obecné pravidlo pro integraci součinu funkcí.

4. $\int \sqrt{x}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = ..\text{V2}.. = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{2}\sqrt{x^7} - \frac{1}{2}\sqrt{x} + C$

5. $\int x\left(x^2 - 6x + \frac{5}{x^2}\right)dx = \int \left(x^3 - 6x^2 + \frac{5}{x}\right)dx = ..\text{V2,3}.. = \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 5\ln|x| + C$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli(i pod odmocninou)doplníme na čtverec.

6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-8x+2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2-16+2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2-14}}dx = ..\text{V15}..$

$= \ln\left|(x-4) + \sqrt{x^2-8x+2}\right| + C$

7. $\int \frac{1}{x^2-2x+10}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2-1+10}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+9}dx = ..\text{V12}.. = \frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x-1}{3} + C$

ALE!

8. $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx = ..\text{V8}.. = \ln\left|x^2-2x+10\right| + C$

Není tedy možné k řešení přistupovat bezmyšlenkovitě a rozhodně je třeba zvládnout základní vzorce.

III. Integrace racionálních funkcí lomených (RLF)

Neryze lomenou racionální funkci vyjádříme vydělením jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Pokud má tato ryze lomená funkce tvar $\frac{A}{(ax+b)^n}$ nebo $\frac{A}{ax^2+bx+c}$, integrujeme ji pomocí některého ze vzorců V12, V13, V9, popřípadě V8.

Příklady

1. $\int \frac{1}{x-3}dx = ..\mathrm{V}\,8.. = \ln|x-3| + C$

2. $\int \frac{2}{(3x-2)^4}dx = 2\int (3x-2)^{-4}dx = ..\mathrm{V}9.. = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-2)^{-3}}{-3} = -\frac{2}{9(3x-2)^3} + C$

3. $\int \frac{1}{x^2+3x+4}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 4}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}}dx = ..\mathrm{V}12..$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C$$

4. $\int \frac{x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = ..\mathrm{V}\,8.. = \frac{1}{2}\ln|x^2+3| + C$

Případně se může ryze lomená RLF rozepsat

5. $\int \frac{x+2}{x^2-5}dx = \int \frac{x}{x^2-5} + \frac{2}{x^2-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-5}dx - 2\int \frac{1}{5-x^2}dx = ..\mathrm{V}\,8, \mathrm{V}\,13..$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-5| - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right| + C$$

Neryze lomené funkce rozložíme dělením:

6. $\int \frac{x^2}{x^2+2}dx = \left| ..x^2 : (x^2+2) = .. \right| = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+2}\right)dx = ..\mathrm{V}12.. = x - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

Jiný způsob výpočtu spočívá v přičtení a odečtení vhodné konstanty k čitateli a následné rozdělení integrované funkce na dva zlomky :

$$\int \frac{x^2}{x^2+2}dx = \int \frac{x^2+2-2}{x^2+2}dx = \int \frac{x^2+2}{x^2+2} - \frac{2}{x^2+2}dx = \int 1 - \frac{2}{x^2+2}dx = ...$$

7. $\int \frac{12x^3 - 13x^2 + 4x - 1}{4x+1}dx = \left| ..\left(12x^3 - 13x^2 + 4x - 1\right) : (4x+1) = .. \right| =$

$$= \int 3x^2 - 4x + 2 - \frac{3}{4x+1}dx = 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 2x - 3\cdot\frac{1}{4}\ln|4x+1| =$$

$$= x^3 - 2x^2 + 2x - \frac{3}{4}\ln|4x+1| + C$$